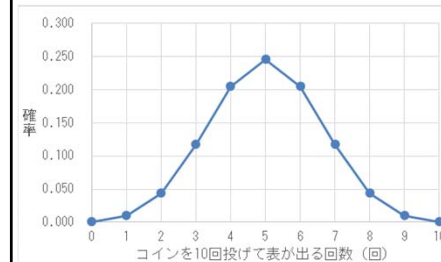


確率分布

佐賀大学 新井康平

二項分布

- コインを10回投げて表が出る回数の確率



表の出る回数	確率
0	0.001
1	0.010
2	0.044
3	0.117
4	0.205
5	0.246
6	0.205
7	0.117
8	0.044
9	0.010
10	0.001

ベルヌーイの試行→二項分布

- 「コインを投げたときに表が出るか裏が出るか」のように、何かを行ったときに起こる結果が2つしかない試行

$$P(X=1)=p$$

$$P(X=0)=1-p$$

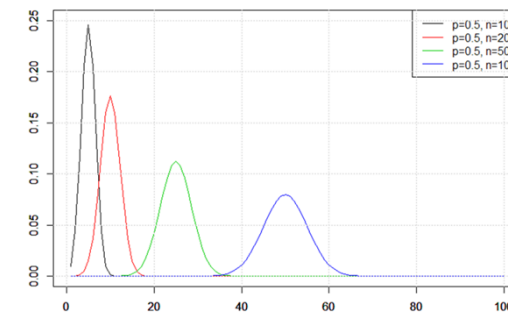
- n 回のベルヌーイ試行を行うときにちょうど回成功する確率、すなわちとなる確率は次の式から計算

$$P(X=k) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

- 例えば、コインを10回投げて表が3回出る確率は、表が出る確率がであることから、次のように計算

$$P(X=3) = {}_{10} C_3 \times 0.5^3 \times (1-0.5)^{10-3} = 0.117$$

- コインを投げる回数 (= 試行回数) を20、50、100回と増やした場合、コインの表が出る回数の確率のグラフ



二項分布の期待値と分散

- 例えばコインを10回投げる時、表が出る回数の期待値と分散を求めてみます。コインを何回か投げたときに表が出る回数は二項分布に従います。試行回数は、表が出る確率はであることから、次のように計算

$$E(X) = np \qquad E(X) = 10 \times 0.5 = 5$$

$$V(X) = np(1-p) \qquad V(X) = 10 \times 0.5 \times (1-0.5) = 2.5$$

当たりが出る期待値と分散

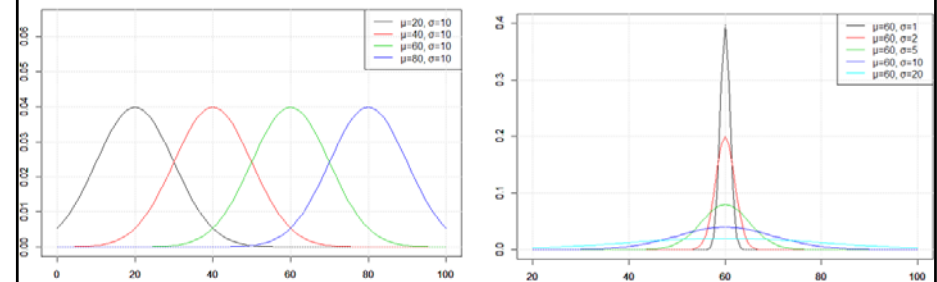
- 当たりが出る個数の期待値は $P(X=k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\dots,n)$
- $E(X) = np$ を用いて、
 $E(X) = 10 \times 0.12 = 1.2$
- 個と算出されます。したがって、このお菓子は10個買えば1個は当たりが出るのが期待できます。
 $P(X=0) = {}_{10}C_0 \times 0.12^0 \times (1-0.12)^{10-0} = 0.279$
- 当たりが出る個数の分散は $V(X) = np(1-p)$ を用いて、
 $V(X) = 10 \times 0.12 \times (1-0.12) = 1.056$
 $P(X=1) = {}_{10}C_1 \times 0.12^1 \times (1-0.12)^{10-1} = 0.380$
 $P(X=2) = {}_{10}C_2 \times 0.12^2 \times (1-0.12)^{10-2} = 0.233$
- となります

例題

- お菓子には当たりくじがついており、1,000個中120個の確率で当たりがついているということが分かっています。このお菓子の中からランダムに10個購入したとき、10個の中に当たりが0個、1個、2個含まれる確率はそれぞれいくらかでしょうか。また、当たりの個数の期待値と分散はいくら
- 購入するお菓子は10個なので試行回数となります。1,000個中120個の確率で当たりが含まれているということが分かっている

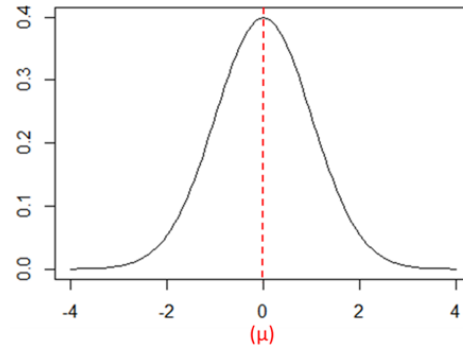
正規分布 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$

- 正規分布に従う確率変数の確率密度関数
- 二項分布において試行回数を無限大



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 1} e^{-\frac{(x-0)^2}{2 \times 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

- 「平均=0、分散=1」である正規分布を「標準正規分布」



偏差値

- 偏差値は「平均が50点、標準偏差が10点」となるように、標準化した値に10をかけて50を足したものです。
- 数学の偏差値： $50 + 10 \times 1.3 = 63$
- 国語の偏差値： $50 + 10 \times 1.5 = 65$

例題

- あるクラスの数学と国語のテストの結果は次の通りでした。
- 数学 平均点：60点 標準偏差：15点
- 国語 平均点：40点 標準偏差：20点
- 順位がより上なのはどちらの教科

$$z_{\text{math}} = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 60}{15} = 1.3$$

$$z_{\text{japanese}} = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{70 - 40}{20} = 1.5$$

数学80点
(平均点60点)

国語70点
(平均点40点)



太郎君