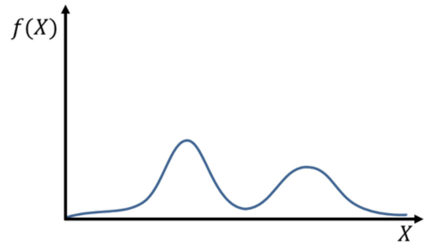
確率密度関数

佐賀大学　新井康平

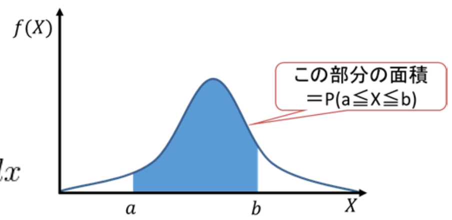
確率密度

- 確率密度は定義域内での *x* の値の「相対的な出やすさ」を表すものです。
- 連続型確率変数Xがある値xをとる確率密度を関数 *f(x)* とする



- 確率密度関数において、（確率変数がとる値の範囲が以上以下）となる確率は次の積分の計算によって求められます。

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



離散分布と連続分布

- 離散型分布と連続型分布の種類を示したものが右の表です。

離散型分布	連続型分布
一様分布 二項分布 多項分布 ポアソン分布 幾何分布 （超幾何分布）	連続一様分布 正規分布 指数分布 t分布 F分布 カイ二乗分布

累積分布関数

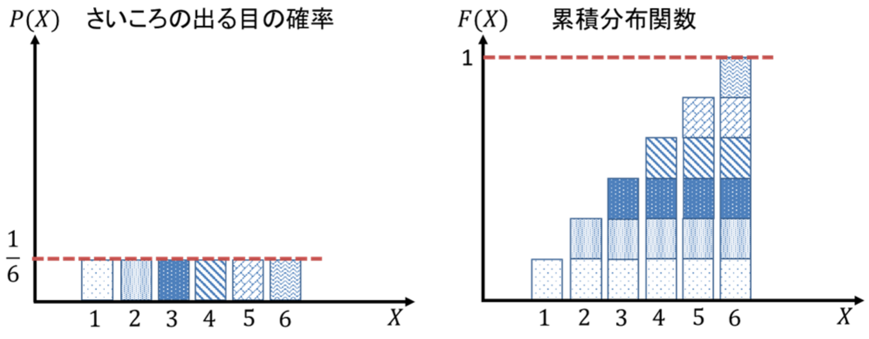
- 累積分布関数とは「確率変数がある値以下（*X*>*x*）の値となる確率」を表す関数
- 例えばさいころを投げたときに「出る目が4以下となる確率」や「出る目が4から6の目が出る確率」といった、ある範囲の確率を求める場合があります。このような場合には「累積分布関数」を使うと非常に便利です。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

$$F(x) = P(X \leq x)$$

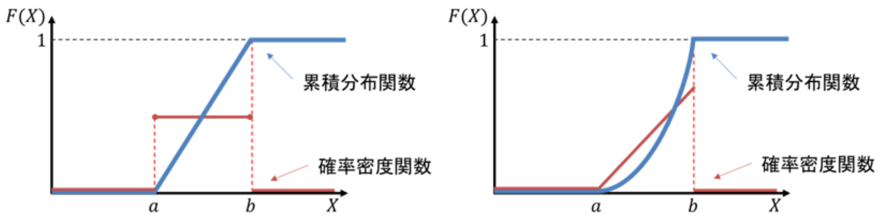
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{X \leq x} P(X)$$

さいころの出る目の確率とその累積分布関数



- 確率密度関数の積分によって累積分布関数を求めることができます。

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$



期待値

- 確率変数の期待値は、確率変数がとる値とその値をとる確率の積を全て足し合わせたもので、確率変数の平均値

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{6} x_i p_i \\
&= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{7}{2} = 3.5
\end{aligned}
$$

期待値＝「3.5」

離散型確率変数の分散

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

$$
V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i
$$

さいころの出る目 (X)	1	2	3	4	5	6
確率 $(P(X))$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - 3.5)^2 p_i \\
&= \frac{(1-3.5)^2}{6} + \frac{(2-3.5)^2}{6} + \frac{(3-3.5)^2}{6} \\
&\quad + \frac{(4-3.5)^2}{6} + \frac{(5-3.5)^2}{6} + \frac{(6-3.5)^2}{6} \\
&= \frac{1}{6}\{6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25 + 6.25\} \\
&= \frac{17.5}{6} = \frac{35}{12}
\end{aligned}
$$

連続型確率変数の分散

- 例えば確率密度関数において、確率変数が0から6の範囲をとるとき、分散は次のようになります。ただし、$E(x)$=3であることを用います。

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \\
&= \int_{0}^{6} (x-3)^2 \times \frac{1}{6}dx \\
&= \left[\frac{(x-3)^3}{18}\right]_0^6 \\
&= \frac{27}{18} - \left\{-\frac{27}{18}\right\} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

- 分散は期待値を用いて次の式から求められます。

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2 f(X)dX \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (X^2 - 2X\mu + \mu^2) f(X)dX \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(X)dX - \int_{-\infty}^{\infty} 2X\mu f(X)dX + \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 f(X)dX \\
&= E(X^2) - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} X f(X)dX + \mu^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu \times E(X) + \mu^2 \\
&= E(X^2) - 2\{E(X)\}^2 + \{E(X)\}^2 \\
&= E(X^2) - \{E(X)\}^2
\end{aligned}
$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

さいころ投げの場合

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \\
&= \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) \\
&= \frac{91}{6}
\end{aligned}
$$

$$\{E(X)\}^2 = (3.5)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

さいころの出る目 (X)	1	2	3	4	5	6
(さいころの出る目)^2 (X^2)	1	4	9	16	25	36
確率 $(P(X))$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$