平成30年度前学期応用線形数学中間試験解答例

１．A を n 次正方行列とする。I を n 次正方行列の単位行列とする。これらを並べて $n\times 2n$ 型の行列 $[A\quad I]$ を考える（単に並べただけ）。この行列に、基本行列を左から掛けていき、k 個の基本行列を掛け合わせたら

$P_k\cdot\cdot\cdot P_2P_1[A\quad I] = [P_k\cdot\cdot\cdot P_2P_1A\quad P_k\cdot\cdot\cdot P_2P_1I] = [DA\quad DI] = [I\quad D]$

となったとする。このとき、左の n 次正方行列が単位行列になったときの、右の n 次正方行列は A の逆行列 $D=A^{-1}$ である。

２．A:行列(p 次の正方行列)の　λ：固有値、　x：固有ベクトルとすると、

$$Ax=\lambda x$$

行列 A の固有値と固有ベクトル(正規直交ベクトル)の p 個の組、

$$(\lambda_1\ x_1),(\lambda_2\ x_2),\Lambda\ ,(\lambda_p\ x_p)$$

から

$$A=\lambda_1 x_1 x_1' + \lambda_2 x_2 x_2' + \Lambda + \lambda_p x_p x_p'$$

と表せる。一方、主成分分析は共分散行列の固有値分解であり、第3主成分まででで表記すると、

$$\Sigma = \lambda_1 x_1 x_1' + \lambda_2 x_2 x_2' + \Lambda + \lambda_p x_p x_p'$$
$$= \lambda_1 x_1 x_1' + \lambda_2 x_2 x_2' + \lambda_3 x_3 x_3' + E$$

と表せる。

３．3次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

に対して、固有方程式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

を解いて、固有値 $\lambda=\alpha,\beta,\gamma$ が求まったとする。(ここでは、α,β,γ の相異なる場合のみ扱う。)

次に、各 α,β,γ に対して、同次連立1次方程式

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

を解いて、それぞれの固有値に対する固有ベクトルが得られる。(これらは、任意定数を含む。)

適当に任意定数を定め、α,β,γ に対する固有ベクトルをそれぞれ1個ずつ取って、

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、定義より、

$$A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p_1 \\ \alpha p_2 \\ \alpha p_3 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta q_1 \\ \beta q_2 \\ \beta q_3 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma r_1 \\ \gamma r_2 \\ \gamma r_3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

よって、行列の積の定義より、

$$A\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p_1 & \beta q_1 & \gamma r_1 \\ \alpha p_2 & \beta q_2 & \gamma r_2 \\ \alpha p_3 & \beta q_3 & \gamma r_3 \end{pmatrix}$$

を得る。 一方、

$$\begin{pmatrix} \alpha p_1 & \beta q_1 & \gamma r_1 \\ \alpha p_2 & \beta q_2 & \gamma r_2 \\ \alpha p_3 & \beta q_3 & \gamma r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

なので、結局、

$$A\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

である。そこで、

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

となる。

ここで、 α, β, γ が相異なることから固有ベクトルの **1** 次独立性より、

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

である。つまり、行列 ***P*** は逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を持つ。 従って、

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

となる。これを行列 A の対角化という。

4． $\Phi_A(t)=\begin{vmatrix}-t & 1 & 1\\ 1 & -t & 1\\ 1 & 1 & -t\end{vmatrix}=-(t+1)^2(t-2).$ よって， A の固有値は $\lambda=2,-1$ である。次に A の固有ベクトルを求める。

$\lambda=2$ に対する固有ベクトルは $(A-2I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，この連立方程式を解くと

$$A-2I=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{-\frac{R_2}{3}\to R_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

これより自由度 1 となるので $x_3=\alpha$ とおくと，

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_2+2x_3\\ x_3\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\quad(\alpha\neq 0)$$

となる。

次に $\lambda=-1$ に対する固有ベクトルは $(A-3I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x}$ なので，連立方程式を解くと

$$A+I=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となる。これより自由度 2 となるので $x_2=\beta\neq 0, x_3=\gamma\neq 0$ とおくと，

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-x_2-x_3\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta-\gamma\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

となる。

5．固有値 λ に対応する A^TA の固有値ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とするとき $\boldsymbol{u}=A\boldsymbol{v}$ は同じ固有値に対応する AA^T の固有ベクトルとなる．$\|\boldsymbol{v}\|=1$ とすると

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}^TA^TA\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}=1$$

となる．もう片方も成り立つ．（証明終）

6．行列 A の固有値を a、b とする。対応する固有ベクトル方向の座標系への変換を表す行列を V と書く。固有値と固有ベクトルを使って行列を書きなおすと、

$A=V^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}V$ となる。$VV^{-1}=I$ という性質(I は単位行列) を思い出しておくと、

$$\begin{aligned}
A^2 &= V^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}VV^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}V \\
&= V^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}V \\
&= V^{-1}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}V \\
A^3 &= V^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}VV^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}VV^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}V \\
&= V^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}V \\
&= V^{-1}\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}V
\end{aligned}$$

といったことが確認できる。もっと一般的に、

$$A^n=V^{-1}\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}V$$

となる。

7．<u>○ 必要性</u>

$AA^-A=A$ が成り立つとする．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ は解を持つので $\boldsymbol{y}$ は A の値域 $S(A)$ に属し，ある $\boldsymbol{b}$ を用いて $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{b}$ と書くことができる．$AA^-A=A$ の両辺の右から $\boldsymbol{b}$ をかけると

$$AA^-A=A \Rightarrow AA^-A\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{b} \Rightarrow AA^-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$$

であるので，$\boldsymbol{x}=A^-\boldsymbol{y}$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ を満たし $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ の解となる．

<u>○ 十分性</u>

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ を満たす任意のひとつの解を $\boldsymbol{x}_1$ とする．すなわち $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}_1$ である．いま与えられた A^- に対し，$\boldsymbol{x}_2=A^-\boldsymbol{y}$ とする（$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は一致しないかもしれない）．題意より $\boldsymbol{x}_2$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ の解であるので，$A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}$ が成り立つ．これより，

$$A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}_2=AA^-\boldsymbol{y}=AA^-A\boldsymbol{x}_1$$

が任意の $\boldsymbol{x}_1$ に対して成立するので $AA^-A=A$ が成り立つ．

8. 固有振動数を思い出せ。固有値展開における固有値は分散、固有ベクトルは分散軸に相当する。

9. まず，A の特異値分解を求める．

$$AA^T=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

であり，その固有値は $\lambda=10$ および 0 となる．したがって特異値は

$$\mu_1=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{10}$$

となり，$\lambda_1=10$ に対応する正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

となる．次に,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

であるので，その固有値は同じく $\lambda = 10$ および 0 となり，$\lambda_1 = 10$ に対応する正規化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と計算される．よって，A の特異値分解は

$$A = \mu_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1{}^T = \sqrt{10}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる．しかるに，定理 1 より A のムーアーペンローズ型一般化逆行列 A^+ は (2) より

$$A^+ = \frac{1}{\mu_1} v_1 u_1{}^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

と求められる．

10.の解答

例えば $\boldsymbol{x}_0$ が A の固有値 λ_0 に属する固有ベクトル（$A\boldsymbol{x}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{x}_0$ ） であれば、 任意の実数 k に対して $k\boldsymbol{x}_0$ も λ_0 に属する固有ベクトルである。 (厳密には $k = 0$ を除外しなければならないが、自明なので以下明記しない)

なぜなら、$A(k\boldsymbol{x}_0) = kA\boldsymbol{x}_0 = k\lambda_0\boldsymbol{x}_0 = \lambda_0(k\boldsymbol{x}_0)$

このように、固有ベクトルは必ず任意パラメータを含む形で求まる。

ある固有値 λ に属する固有ベクトルに含まれるパラメータの数＝自由度について考えよう。

λ から固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める方程式は、 n 元 n 連立の一次方程式となる。

すなわち、

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11} - \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{o}$$

階数の定義より、上記連立方程式の拡大係数行列を行に対する基本変形で階段行列化した際には 非ゼロの行が $\mathrm{rank}(A - \lambda I)$ 行、ゼロの行が $n - \mathrm{rank}(A - \lambda I)$ 行現われる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{11} - \lambda & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & * & \dots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} \mathrm{rank}(A - \lambda I) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} n - \mathrm{rank}(A - \lambda I) \end{matrix}$$

ここで、係数行列 $A-\lambda I$ は正則ではないため、 $\mathrm{rank}(A-\lambda I)<n$ である。 したがって、掃き出し後の階段行列にはゼロの行が必ず１行以上現われることになる。

すなわちはき出せない列が $n-\mathrm{rank}(A-\lambda I)$ 列現れて、 解には同数の未定係数（パラメータ）が現われることになる。

$$\boldsymbol{x}=c^{(1)}\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\\vdots\\x_n^{(1)}\end{bmatrix}+c^{(2)}\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\\\vdots\\x_n^{(2)}\end{bmatrix}+\cdots+c^{(m)}\begin{bmatrix}x_1^{(m)}\\x_2^{(m)}\\\vdots\\x_n^{(m)}\end{bmatrix}$$

ただし、$c^{(1)},c^{(2)},\ldots,c^{(m)}$ は任意係数であり、

$m=n-\mathrm{rank}(A-\lambda I)$

である。

すなわち、固有ベクトルの自由度は $n-\mathrm{rank}(A-\lambda I)$ である。

繰り返しになるが、$\mathrm{rank}(A-\lambda I)<n$ であるため、 すべての固有値に対する固有ベクトルは最低１以上の自由度を持つ。