1 両眼立体視

左眼および右眼により得られる画像を、$L(x,y), R(x+d(x,y),y)$ とする。ここで、x,y,d は網膜上の2次元座標および視差であるとする。両画像から3次元立体を計算機上に構成する際、ラプラシアンガウス関数との畳み込み積分、

$$\int [\nabla^2 G \otimes (L(x,y) - R(x+d(x,y),y))]^2 dxdy \tag{1}$$

を最小にする。ここで、$\otimes$ は畳み込み積分の記号である。これは、不良設定問題であるので連続逆問題になる。安定した解を求めるため、ラグランジェの未定乗数法を適用し、その際、制約条件として視差の勾配の2乗、

$$\lambda(\nabla d)^2 \tag{2}$$

を用いるものとした時の逆問題を定式化せよ。

2 コンピュータトモグラフィ

X線ビーム強度を I、ビームに沿った距離を s、対象物の吸収係数を $a(x,y)$ とする。X線源のビーム強度を I_0 とし、対象物を透過して放射状に配列した N 個のX線検知器にて検知出力が得られるようになっているものとする。

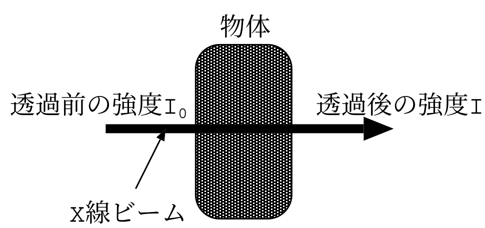

図 1: X 線トモグラフィにおける対象物の X 線透過の様子

すると、i 番目の検知器にて得られるX線ビームの強度は、

$$I_i = I_0 \exp[-\int a(x,y)ds]$$
$$lnI_0 - lnI_i = \int a(x,y)ds \tag{3}$$

で表せる。この指数関数をテイラー展開し、1次の項で近似することにより、上式を線形化して表せ。ただし、

$$\triangle I = sm$$

$$\triangle I = [\triangle I_1, ..., \triangle I_N]^t$$

$$m = [a_1(x,y), ..., a_M(x,y)]^t$$

$$s = \begin{bmatrix} \triangle s_{11} & . & \triangle s_{1M} \\ . & . & . \\ \triangle s_{N1} & . & \triangle s_{NM} \end{bmatrix} \tag{4}$$

である。ここで、

$$\triangle I_i = \frac{I_0 - I_i}{I_0}$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \triangle s_{ij} a_j(x,y) \tag{5}$$

である。また、この s_{ij} の式を導出せよ。

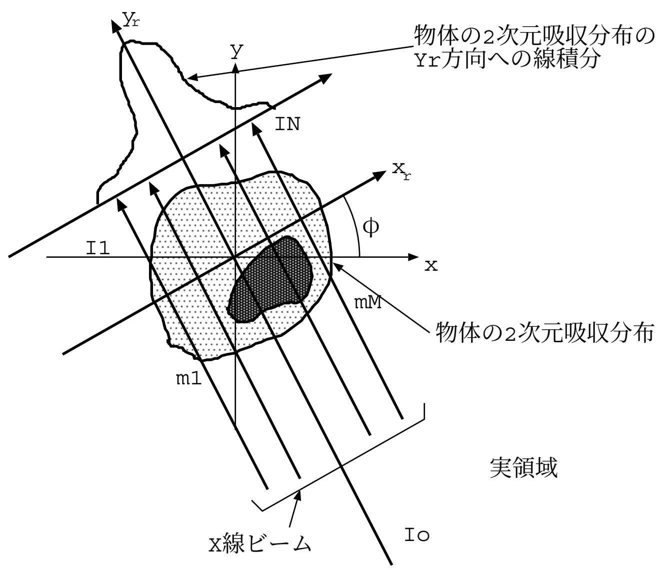

図 2: X 線トモグラフィにおける検知器による X 線検知の様子

3　特異値分解

観測過程が

$$g = Hf + n \tag{6}$$

で表される場合を考える。ここで

$$E[f] = 0$$

$$E[n] = 0$$

$$[cov.f] = E[ff^t]$$
$$[cov.n] = E[nn^t] \tag{7}$$

である。また f, n は無相関である。行列 H が基底ベクトル $u_1, ..., u_M$ および $v_1, ..., v_N$ からなる直交ベクトル U および V を用いて

$$H = U^t \Lambda V = U \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & . & \\ & & & \lambda_R \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^t \tag{8}$$

と特異値分解できるものとする。すると、観測過程は

$$g = U \Lambda V^t f + n \tag{9}$$

となり、これに U を左から掛けて

$$Ug = \Lambda V f + Un \tag{10}$$

となる。この結果、観測過程は

$$g' = \Lambda f' + n' \tag{11}$$

となる。ここで

$$g' = Ug$$
$$f' = Vf$$
$$n' = Un \tag{12}$$

である。この時、f', n' の平均、共分散 $E[f'], E[n']$ および $E[f'f'^t], E[n'n'^t]$ を求めよ。また、f の推定 2 乗誤差 (Cost Function)

$$J = (g - H\hat{f})^t (g - H\hat{f}) \tag{13}$$

を最小にする推定式を導出せよ。

4 カテゴリ分解

光が観測対象物に入射し、観測対象物からの反射光を n 個の波長に分光[1] して光の強度 (分光放射輝度) を計測するものとする。観測対象物は k 種類の分光

[1] これを分光チャンネルと呼ぶ

放射輝度特性を持つ因子(カテゴリ)から構成されているものとする。その各因子の面積比を$a_j, (j = 1, \cdots, k)$とすると、観測ベクトルP(分光チャンネルの出力：n次元ベクトル)は各因子の代表的な分光放射輝度特性m_jによって次式のように表される。

$$P = \sum_{j=1}^{k} a_j m_j \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = 1 \tag{15}$$

$$a_j \geq 0 \tag{16}$$

観測ベクトルは観測雑音zを考慮して、次式で記述できる。

$$P = MA + z \tag{17}$$

$$\begin{aligned} P &= [p_1, p_2, \cdots, p_n]^t \\ M &= [m_1, m_2, \cdots, m_k] \\ A &= [a_1, a_2, \cdots, a_k]^t \end{aligned}$$

$n > k$としてM, Pが与えられた時、Aを求めよ。

5　単眼立体視

単眼立体視(片目の網膜に映し出される2次元画像から立体画像を脳に再構成する、または、一台のカメラで撮影した2次元画像を計算機に取り込み、立体画像を計算機の中で再構成する)の方法を示せ。この時、2次元画像を$f(x, y)$をとし、立体画像を$g(x, y, z)$とする。また、観測対象物は立方体であり、反射率が1の面で構成されるものとする。背景は反射率が0であるとする。照明光は仰角45度、方位角45度の方向から平行光で入射するものとする。対象物の影の長さをhとし、線形逆問題の解法を用いて再構成せよ。

6　画像復元

カメラのシャッターが開いている露光時間内にカメラが移動しながら撮像したものとする。この移動時間は出力画像の4画素分に相当していることが判って

いるものとする。すなわち、カメラの画素および出力画像の画素をそれぞれ、$x_{i,j}, y_{i,j}$ とすると、

$$x_{i,j} = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} y_{i+k,j+l} \tag{18}$$

の関係があるものとする。ボケたカメラ画像から出力画像を得る方法を考えよ。[2] また、

$$x_{i,j} = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} y_{i+k,j+l} + z_{i,j} \tag{20}$$

のように雑音が加わった場合の方法も同様に考えよ。[3]

7　人工衛星の高度の推定

地球を周回する人工衛星の軌道が安定しているものとする。地球の自転速度と周回軌道周期の関係から、地球上のある地点で衛星軌道は北から南 (下降軌道) およびその反対 (上昇軌道) とが交差しているものとする (それぞれ別の時刻に通過)。また、その地点における衛星との距離を測ることが出来るものとする。下降および上昇軌道において計測した衛星と地表面との距離をそれぞれ、s_{Di}, s_{Ai} とし、衛星高度を m_{Di}, m_{Ai} とすると、その地点における標高は $m_{Di} - s_{Di}, m_{Ai} - s_{Ai}$ である。正解の標高は一つであるのでその誤差

$$e_i = (m_{Di} - s_{Di}) - (m_{Ai} - s_{Ai}) \tag{21}$$

はゼロになるべきである。この様に考えに基づく衛星軌道高度の決定法を考えよ。[4]

---

[2] $x_{i,j} = d_{i,j}, y_{i,j} = m_{i+k,j+l}$ とすると、

$$d_{i,j} = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} m_{i+k,j+l}$$
$$d = Gm \tag{19}$$

と書ける。$N = M$ であるので平衡決定問題となり、G は正方行列になり、逆行列が存在するので m は求められる。

[3] この場合は劣決定問題になる。モデルパラメータにヌルベクトルが存在することになる。何らかの先見情報を加えて解く。

[4] この時、$s_{Di} - s_{Ai} = d_i$ および $m_{Di} - s_{Di} = \delta_{jDi}, m_{Ai} - s_{Ai} = \delta_{jAi}, G_{ij} = \delta_{jDi} - \delta_{jAi}$ と考えると、$Gm = d$ となる。誤差は異なる軌道間の衛星高度の差だけに依存するので、この誤差を変化させることなしに衛星の軌道高度を決定することが出来る。そのため、$\sum m_i = 0$ の制約条件をつけて解くことにすれば、Lagrange 乗数法を用いて

$$[G^t G] m + \lambda = [G^t d]$$
$$1^t m = 0 \tag{22}$$

を解くことになる。

8　直線当てはめ問題

直線当てはめ問題とは (z, d) の対で表されるデータの集合に直線、

$$d_i = m_1 + m_2 z_i \tag{23}$$

を当てはめる問題である。この時、

$$\begin{aligned} z^t &= [1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0, 10.0] \\ d^t &= [1.1, 2.2, 3.2, 4.1, 4.9, 5.8, 7.1, 8.3, 9.05, 9.9, 15.0] \end{aligned} \tag{24}$$

のデータ集合が与えられたものとして、L_1, L_2, L_∞ ノルムを最小にする切片および傾きの係数をそれぞれ求めよ[5]。

9　線形計画法

線形計画法は $Ax(=, \geq, \leq)b$ で表される等式、または、不等式の制約条件と非負条件 $x \geq 0$ の下で、目的関数 $z = c^t x$ を最大、または、最小にするベクトル x を決定する。たとえば、ハンバーグを作る時、牛肉、たまねぎ、パン粉、卵の分量とカロリーと価格から総価格はそれぞれの分量にそれぞれの価格を乗じたものであり、これをある金額以下に押えると云う不等式の下に総カロリーを最大するようなそれぞれの分量を求める問題である。この問題の解法はシンプレックス法と呼び、$Ax(=, \geq, \leq)b$ は解の空間において多面体の端点を表し、その中で $x \geq 0$ の条件を満たすものを一つ見つけることから始める。その端点から目的関数がより大きな、または、小さな端点を次に求める。それよりも目的関数が大きい、または、小さい端点がなくなれば、その端点が最適解と判断する。この不等式条件は等式条件に置き換えが可能である。$\geq$ は両辺に-1を乗じ

---

[5] これはデータ核が $N \times 2$ の大きさの線形問題である。L_2 ノルムを最小にする問題はこの場合、優決定 (良設定) 問題であるので最小 2 乗法で十分に解くことが出来る。また、データが $[cov.d] = \sigma_d^2 I$ のガウス分布に従うと考えている。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ . & . \\ 1 & z_N \end{bmatrix} \tag{25}$$

L_1, L_∞ ノルムを最小にする問題は $Ay = b, y_i \geq 0$ の条件の下に $c^t y$ を最小化するようにして解く。ここで、

$$\begin{aligned} y^t &= [[m'_1, ..., m'_N], [m''_1, ..., m''_N], \\ &\quad [\alpha_1, ..., \alpha_N], [x_1, ..., x_N], [x'_1, ..., x'_N]] \\ c^t &= [[0, ..., 0], [0, ..., 0], \\ &\quad [1, ..., 1], [0, ..., 0][0, ..., 0]] \\ A &= \begin{bmatrix} G_{N\times M} & -G_{N\times M} & -I_{N\times N} & I_{N\times N} & 0_{N\times N} \\ G_{N\times M} & -G_{N\times M} & I_{N\times N} & 0_{N\times N} & -I_{N\times N} \end{bmatrix} \\ b^t &= [[d_1, ..., d_N], [d_1, ..., d_N]] \end{aligned} \tag{26}$$

ここで $m = m' - m''$ である。

て $\leq$ の不等式に変更でき、このようにして得られるすべての $\leq$ の不等式条件は未知数の数を増やせば、最終的には等式条件になる。たとえば、M 個の未知数 x があり[6]、目的関数 $z = c^t x$[7]、これに N 個の等式条件式 $Ax = b$ が課せられている。ここの不等式条件ごとに1つのスラック変数が加わるので、劣決定問題になる。A の i 番目の列ベクトルを v_i で表すと、等式条件 $Ax = b$ は

$$v_1 x_1 + ... + v_M x_M = b \tag{27}$$

と表せる。ここでベクトル b の長さは N である。この b は N 個の v_i の線形結合で表せる。A のなかで N 個の線形独立な列を選び、b をこの基底ベクトルで展開すれば、制約条件式の一つの解を見つけることが出来る。

$$x_1 v_1 + ... + x_N v_N + 0 v_{N+1} + ... + 0 v_M = b \tag{28}$$

これを基底解と呼ぶ。基底解の内、すべての x_i が非負である解を実行可能解と呼ぶ。このすべての実行可能解は多面体の端点である。L_1 ノルムを最小にする問題は $Ay = b, y_i \geq 0$ の条件の下に $c^t y$ を最小化するようにして解く。ここで、

$$y^t = [[m'_1, ..., m'_N], [m''_1, ..., m''_N],$$

$$[\alpha_1, ..., \alpha_N], [x_1, ..., x_N], [x'_1, ..., x'_N]]$$

$$c^t = [[0, ..., 0], [0, ..., 0],$$

$$[1, ..., 1], [0, ..., 0][0, ..., 0]]$$

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} G_{N\times M} & -G_{N\times M} & -I_{N\times N} & I_{N\times N} & 0_{N\times N} \\ G_{N\times M} & -G_{N\times M} & I_{N\times N} & 0_{N\times N} & -I_{N\times N} \end{array} \right]$$

$$b^t = [[d_1, ..., d_N], [d_1, ..., d_N]] \tag{29}$$

ここで $m = m' - m''$ である。また、L_∞ ノルムを最小にする問題は $Ay = b, y_i \geq 0$ の条件の下に $c^t y$ を最小化するようにして解く。ここで、

$$y^t = [[m'_1, ..., m'_N], [m''_1, ..., m''_N],$$

$$[\alpha], [x_1, ..., x_N], [x'_1, ..., x'_N]]$$

$$c^t = [[0, ..., 0], [0, ..., 0],$$

$$[1], [0, ..., 0][0, ..., 0]]$$

[6] もともとの未知数に新たな変数が加わる (これをスラック変数と云う)

[7] ここで c には必要なだけ 0 が加わる

$$
A = \left[\begin{array}{ccccc} G_{N\times M} & -G_{N\times M} & -1_N & I_{N\times N} & 0_{N\times N} \\ G_{N\times M} & -G_{N\times M} & 1_N & 0_{N\times N} & -I_{N\times N} \end{array} \right]
$$

$$
b^t = [[d_1, ..., d_N], [d_1, ..., d_N]] \tag{30}
$$

ここで $m = m' - m''$ である。