

逆行列

佐賀大学 新井康平

- 行列の積
- 行列の和・差
- 逆行列
- ブロック行列→分割乗法
- 行列基本変形
- ランク
- 三角行列
- べき零行列: $A^k=O$
- べき等行列: $A^2=A$
- 直交行列: $A^{-1}=A^t$
- 対角行列
- 対称行列: $A^t=A$
- 交代行列: $A^t=-A$
- エルミート行列: $A^*=A$

行列 A と C に次の関係があるとする。

$$AC = CA = I \quad (1)$$

この時, C は A の逆行列であるという. C を持つ行列 A を正則行列という.

$$C = A^{-1} \quad (2)$$

正方行列の逆行列は次式で表せる.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A' \quad (3)$$

ここで A' は A の余因子行列であり,

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

である. したがって, 行列 A が逆行列をもつための必要十分条件は,

$$|A| \neq 0 \quad (5)$$

である.

正方行列の逆行列は次式で表せる.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A'$$

ここで, $|A|$ は A の大きさ, 行列式である.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると, その行列式 $|A|$, または, $\det A$ (デターミナント) は以下のように定義できる.

$$|A| = \det A = ad - bc$$

行列式は行列要素同士の演算なのでスカラー量である. 2 次よりも高い次数の行列の行列式は, 前出の小行列を使って展開することにより, 2 次の行列式に変換して求める.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{13} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

となる. 右辺の第 1 項は左辺の 1 行, 1 列を除いた余りであり, 余因子行列と呼ぶ. 第 2 項以降も同様に余因子行列を作って小行列に展開すれば, これら小行列の行列式は定義により求められるので次数の高い行列の行列式は求められることになる. また, A' は A の余因子行列である.

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ここで, A_{ij} は, A の要素から i 行, j 列の要素を除いた残りの要素を並べた行列であり, たとえば, A_{11} は,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

である. したがって, 行列 A が逆行列をもつための必要十分条件は,

$$|A| \neq 0$$

である.

例題

行列 A の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

である。余因子行列は、

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 3 & 9 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

例題

上の例題の行列の逆行列が元の行列の逆行列であることを確認せよ。

解答例

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 3 & 9 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = I$$

A が $m \times n$ 行列である時、適当な m 次正則行列 Q と n 次正則行列 P をとって、

$$QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

という形にすることができる。また、正方行列 A に対して $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることを対角化という。 $AC = I$ となるように対角要素がすべて 1 の対角行列に対角化できるならば、逆行列は求められることになる。