固有値･固有ベクトルの意味

バネ定数が ***k*** [N/m]であるバネに ***m***[kg]の重りをつけると

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

という微分方程式になる。これをさらに $\ddot{x} - -Wx$, $(W - k/m)$ において

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases}$$ とおけば、 $\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}$ なので、

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = -W \cdot x_1 = -W \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \end{cases}$$ となって

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -W & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を解く事になる。周期が１になるように $W=\omega^2=(2\pi)^2$ とする。実は、これは単振動の式なので、

$$x(t) = u \cdot \sin(\omega t) \quad ,(\omega = \sqrt{k/m})$$

という解が判っている。

バネが１個ならば、 $m\ddot{x} = -kx$ だったわけだが、バネを２個つけてみると、 上の重りと下の重りはそれぞれ m_1, m_2[kg]で、バネ定数は k_1,k_2[N/m]として、 初期位置からの変位を X_1,X_2 とすると上側(X_1)の重りにおいて、バネ K_1 の伸びにより K_1*X_1 の力が加わるが、さらに K_2 のバネからも力を受ける。もし X_1 と X_2 が同じだけ移動すれば、K_2 のバネは伸び縮みしないので、力は受けないが違った場合は(X_1-X_2)の差だけ力を受ける。従って X_1 において

$$m\ddot{x}_1 = -(k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2)$$)

X_2 においては、 $m\ddot{x}_2 = -(k_2(x_2 - x_1))$ の微分方程式となり、結局

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 x_1 + k_2 x_2 \\ m\ddot{x}_2 = k_2 x_1 - k_2 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k1+k2)/m & k2/m \\ k2/m & -k2/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

という２階連立微分方程式となる。

ここでは、上の重りと下の重りは同じ重さ(*m*=1[kg])で、 バネは２つとも同じバネ定数(*K*=1[N/m])とすると、

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となる。

固有値：**-0.382** に対して $\begin{pmatrix} -0.526 \\ -0.851 \end{pmatrix}$

固有値：**-2.618** に対して $\begin{pmatrix} -0.851 \\ 0.526 \end{pmatrix}$

という、固有値と、それに相当する固有ベクトルの組が得られる。

これは固有値なので

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.526 \\ -0.851 \end{pmatrix} = -0.0382 \times \begin{pmatrix} -0.526 \\ -0.851 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.851 \\ 0.526 \end{pmatrix} = -2.618 \times \begin{pmatrix} -0.851 \\ 0.526 \end{pmatrix}$$

となる。これは元の問題であったバネで言うと何を意味するか？というと、バネの式は

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

だったわけで、もしも、

$$\begin{cases} x_1 = u_1 * \sin(\omega t) \\ x_2 = u_2 * \sin(\omega t) \end{cases}$$

を満たすならば

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -u_1\omega^2 \times \sin(\omega t) = -\omega^2 \times x_1 \\ \ddot{x}_2 = -u_2\omega^2 \times \sin(\omega t) = -\omega^2 \times x_2 \end{cases}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を満たし、固有値の定義である、 $\mathbf{W}\vec{X} = \lambda\vec{X}$ を満たす。逆に言うと、固有方程式 $\mathbf{W}\vec{X} = \lambda\vec{X}$ を満たす、***x_1,x_2*** は $\begin{cases} x_1 = u_1 * \sin(\omega t) \\ x_2 = u_2 * \sin(\omega t) \end{cases}$ という正弦波となり、これを 固有振動と称する。

この様に、固有振動（＝各部が正弦波の振動をする）を起こす x_1,x_2 を固有ベクトルと言って、 その時の固有振動数 ω が ω=√λ　から求まるので、行列の固有値を固有値と 言う