

行列の対角化

佐賀大学 新井康平

相似行列

定義 1 2つの正方行列 A と B に対して、 $B = P^{-1}AP$ となる正則行列 P が存在するとき、 A と B は相似であるという。

定理 1 2つの正方行列 A と B が相似であれば、

$$\bullet \text{ rank}(A) = \text{rank}(B)$$

$$\bullet |A| = |B|$$

定理 2 A と B が相似なとき、 $A \simeq B$ と書くと

$$\bullet A \simeq A$$

$$\bullet A \simeq B \text{ なら、} B \simeq A$$

$$\bullet A \simeq B, B \simeq C \text{ なら、} A \simeq C$$

三角化・対角化

定義 2 (行列の三角化・対角化) 行列 A, B に対して、

$\bullet A$ が三角行列 B と相似なとき、すなわち $B = P^{-1}AP$ のとき、 A は P で三角化可能

$\bullet A$ が対角行列 B と相似なとき、すなわち $B = P^{-1}AP$ のとき、 A は P で対角化可能

という。

対角化の条件

定理 3 (十分条件) 正方行列 A の固有値がすべて異なるならば、 A は対角化可能である。

定理 4 (必要十分条件) 行列 A に対して

$\bullet n$ 次正方行列 A の異なる固有値は $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

$\bullet$ 固有値の重複度はそれぞれ $n_1, \dots, n_r$ ($n = n_1 + \dots + n_r$)

$\bullet$ 固有空間はそれぞれ $W_{\lambda_1}, \dots, W_{\lambda_r}$

であるとき

$$A \text{ が対角化可能} \iff \dim W_{\lambda_i} = n_i, i = 1, \dots, r$$

例題

問題

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 9 & -5 & 3 \\ -9 & 3 & -5 \end{pmatrix} \text{ の固有値・固有ベクトルを求めなさい.}$$

$\bullet$ 固有多項式 $\Phi_A(t) = \det(tE_3 - A) = (t+2)^2(t-1)$.

$\bullet$ したがって、固有値は -2 と 1 .

$\bullet$ 固有値 1 について

$$1 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ -9 & 6 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

連立方程式

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{固有ベクトル (} t \text{ は任意の実数)}$$

- 固有値 (-2) について

$$(-2) \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -3 \\ -9 & 3 & -3 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(連立) 方程式

$$3x - y + z = 0$$

の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} : \text{固有ベクトル } (t, s \text{ は任意の実数})$$

- 固有値 1 に関する固有ベクトルは, $t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ 固有ベクトルの全体は直線をなす (媒介変数 t).

- 固有値 (-2) に関する固有ベクトルは, $t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ 固有ベクトルの全体は平面をなす (媒介変数 t, s).

固有値の選び方の自由度を「重複度」という概念で定義する.

定義 (固有値の重複度) —

A を n 次正方行列とする. A の固有値 k の重複度を

$$n - \text{rank}(kE_n - A)$$

と定義する.

定理 (行列の対角化可能性) —

A を n 次正方行列とする. A の相異なる固有値を $k_1, k_2, \dots, k_l$, その重複度をそれぞれ $m_1, m_2, \dots, m_l$ とする. このとき,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_l = n$$

ならば, A は対角化可能である. つまり,

$$P^{-1}AP$$

が対角行列となるような n 次正則行列 P が存在する.

- P は固有ベクトルを並べてできる行列.
- 対角行列の対角成分は固有値を重複度込みで並べたもの.

行列が対角化可能であるならば, 固有空間の次元は, 固有方程式の重複度に等しい. すなわち,

$$\dim E_{\lambda_i} = m_i$$

が成立する. ここで E_{λ_i} は, A の固有値 λ_i の固有空間であり, m_i は, λ_i の重複度である.

n 次正方行列 A の固有ベクトルと固有値とは,

$$A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad (1)$$

を満たす

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \quad (2)$$

のベクトル $\mathbf{a}$ と値 λ である.

(1) は,

$$(\lambda I - A)\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3)$$

と表してもよい. (3) は, 同次連立一次方程式であり, (2) を満たす解を持つことと, 行列式が 0 であることが同値である (同次連立一次方程式が自明な解以外の解を持つ場合を参考のこと). 従って,

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (4)$$

が成立する. (4) の左辺は, λ に関する n 次多項式であるので, 代数学の基本定理によって, n 個の積による因数分解が可能である. よって,

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (5)$$

と表すことができる ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$)。したがって、(4) は、

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

と表される。これより、

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (6)$$

が成立するので、固有値 λ は、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ のいずれかである。

(6) の固有値のうち、 m 個の値が等しく、その m 個の固有値が、それら以外の固有値とは値が異なるものとする。すなわち、

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_{i+m-1} \\ \lambda_i &\neq \lambda_j \quad (j = 1, \dots, i-1, i+m, \dots, n) \end{aligned} \quad (7)$$

であるとする。このとき、(5) を

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_i)^m \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (8)$$

と表すことが出来る。 m を重複度という。

固有値 λ_i を持つベクトルの全体を E_{λ_i} とする、すなわち、

$$A\mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i \quad (9)$$

を満たすベクトル $\mathbf{a}_i$ の全体を E_{λ_i} と表すと、 E_{λ_i} は、部分空間を構成し、固有値 λ_i の固有空間という。

このとき、 A が対角化可能であるならば、すなわち、

$$P^{-1}AP = \Lambda \quad (10)$$

を満たす正則行列 P と対角行列 Λ が存在するならば、 E_{λ_i} の次元は、 λ_i の重複度 m に等しいことが示される。すなわち、

$$\dim E_{\lambda_i} = m \quad (11)$$

が成立する。(11) を以下のように証明する。

$$(\lambda_i I - A)\mathbf{a}_i = 0 \quad (12)$$

と表してもよい。上で定義したように、これを満たす $\mathbf{a}_i$ の全体が E_{λ_i} である。

一般に、同次連立一次方程式 $B\mathbf{x} = 0$ を満たす $\mathbf{x}$ 全体の次元は、 $n - \text{rank}(B)$ である (解空間の次元を参考)。よって、(12) より、 E_{λ_i} の次元は、

$$\dim E_{\lambda_i} = n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$$

である。

ここで、正則行列を掛けてもランクが変わらないことから、(10) より、

$$\begin{aligned} \text{rank}(\lambda_i I - A) &= \text{rank}(P^{-1}(\lambda_i I - A)P) \\ &= \text{rank}(\lambda_i I - P^{-1}AP) \\ &= \text{rank}(\lambda_i I - \Lambda) \end{aligned}$$

が成立する。よって、

$$\dim E_{\lambda_i} = n - \text{rank}(\lambda_i I - \Lambda) \quad (13)$$

である。

ここで、 Λ は、 A を対角化した行列であり、対角化した行列の対角成分は、もとの行列の固有値に等しいことから、 Λ は、

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{i-1} & & & \\ & & & \lambda_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_{i+m-1} & & \\ & & & & & & \lambda_{i+m} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

と表される。一方で、 $\lambda_i I$ は、

$$\lambda_i I = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

であるので、(7) より、

$$\lambda_i I - \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_i - \lambda_{i-1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \lambda_i - \lambda_{i+m} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_i - \lambda_n \end{bmatrix}$$

である。よって、 $\lambda_i I - \Lambda$ は、 m 個の対角成分が 0 であり、それ以外の成分は 0 でない n 次対角行列である。

この行列の簡約化行列は、

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

であり、行列のランクは、簡約化した行列の主成分に等しいので、

$$\text{rank}(\lambda_i I - \Lambda) = n - m$$

が成立する。

これと (13) から、

$$\dim E_{\lambda_i} = m$$

対角化の方法

n 次正方行列 A の異なる固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, その重複度をそれぞれ $n_1, \dots, n_r$ ($n = n_1 + \dots + n_r$) とする。

- 固有空間 $W_{\lambda_1}, \dots, W_{\lambda_r}$ の基底をそれぞれ求める
- 各基底を構成するベクトル全体を列ベクトルにもつ行列を P とする
- このとき

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \lambda_2 I_{n_2} & \\ 0 & & \lambda_r I_{n_r} \end{bmatrix}$$

例：行列の対角化

例 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は対角化可能か調べ、可能ならば対角せよ。

解答

- 固有方程式 $\begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)^2 = 0$ より、固有値は 1(重複度 2).
- 固有空間の次元 $\dim W_\lambda = n - \text{rank}(A - \lambda I)$:

$$\dim W_1 = 2 - \text{rank}(A - I) = 2 - \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

- 重複度と固有空間の次元が異なるため、対角可能でない。

例：行列の対角化

例 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ は対角化可能か調べ、可能ならば対角せよ。

解答

- 固有方程式 $\begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} = (x-1)(x+1) = 0$ より、固有値は ± 1 .
- 固有値はすべて異なるから対角化可能である。
- すべての固有値に対する固有空間の基底を求める。

例2(つづき)

- 同次連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

をそれぞれ解いて

$${}^t[x_1, y_1] = {}^t[2a, a], \quad {}^t[x_2, y_2] = {}^t[0, b] \quad (a, b \text{ 任意定数})$$

- W_1 の基底 ${}^t[2, 1]$, W_{-1} の基底 ${}^t[0, 1]$
- したがって、

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ とすれば、 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

例：行列の対角化

例 3 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は対角化可能か調べ、可能ならば対角せよ。

解答

- 固有方程式 $\begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -(x-1)^2(x+1) = 0$ より、固有値は 1(重複度 2) と -1 .
- 次より、対角化可能である。

$$\dim W_1 = 3 - \text{rank}(A - I) = 2, \quad \dim W_{-1} = 3 - \text{rank}(A + I) = 1$$

例3(つづき)

- 同次連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

をそれぞれ解いて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a, b, c は任意の定数)

例3(つづき)

● W_1 の基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, W_{-1} の基底 $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

● したがって、

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ とすれば, } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ベクトル空間の基底と次元

- $u_1, \dots, u_n$ が V を生成する(generate)
 V のどの元も $u_1, \dots, u_n$ の1次結合
- R^n の基本ベクトル $e_1, e_2, \dots, e_n$ は R^n を生成する.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

V の元の組 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ が V の基底

- $$\begin{cases} (1) u_1, \dots, u_n \text{ は1次独立}^1, \\ (2) u_1, u_2, \dots, u_n \text{ は } V \text{ を生成する.} \end{cases}$$

- R^n の基本ベクトル $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ は R^n の基底である.
- この $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を R^n の標準基底と呼ぶ

ベクトル空間 V の基底を構成する
元の個数はつねに同じ

- $u_1, \dots, u_m$ と $v_1, \dots, v_n$ が V の基底であるとする
- $v_1, \dots, v_n$ は $u_1, \dots, u_m$ の1次結合. ここでも $n > m$ ならば $v_1, \dots, v_n$ は1次従属
- $v_1, \dots, v_n$ が基底であることに反する.
- ゆえに $n < m$ である. 上の議論で, $u_1, \dots, u_m$ と $v_1, \dots, v_n$ の役割を交換すれば, $m < n$ が出る. ゆえに $m = n$ である.

- ベクトル空間 V の次元(記号で $\dim(V)$ と書く)とは, V の基底をなす元の個数
- 零ベクトルのみからなるベクトル空間を0次元のベクトル空間
- $\dim(R^n) = n$. なぜなら, $e_1, \dots, e_n$ は R^n の基底
- $\dim R[x]^n = n + 1$. なぜなら, 単項式 $1, x, \dots, x_n$ は1次独立, かつ $R[x]^n$ を生成するので, $R[x]^n$ の基底

- V が有限次元: V のベクトルの1次独立な最大個数が有限、その最大個数が $\dim(V)$
- $\dim(V) = n$ とし, $\{u_1, \dots, u_n\}$ を V の基底の一つとする. V から $(n+1)$ 個以上のベクトルをとって来ると, それらは必ず $u_1, \dots, u_n$ の1次結合で書けるので, 1次従属である. ゆえに n が1次独立な最大個数

- 逆に1次独立な最大個数を n とし, $u_1, \dots, u_n$ が1次独立であるとする. 任意の $u \in V$ に対して, $u, u_1, \dots, u_n$ は1次従属ゆえ, u は $u_1, \dots, u_n$ の1次結合.
- ゆえに $u_1, \dots, u_n$ は V を生成していて基底となるから, $\dim(V) = n$

例

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ を考えると, $\dim(W) = 2$
- 実際, 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の1行目と2行目は1次従属であり, これらは3行目と1次独立なので, $\text{rank}(A) = 2$ である. そしてこれは a_1, a_2, a_3 の1次独立な最大個数に等しい.

例題

- 次の解空間の次元を求め, 基底を1組挙げよ

$$W := \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 \end{bmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$W = \{ x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0 \}$$

- A を簡約化すると

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-2) \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 1 & \textcircled{1} + \textcircled{2} \times (-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & \end{array}$$

- $x_2 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$ とおくと, $Ax = 0$ の解 x , すなわち $x \in W$ は

$$x = \begin{bmatrix} 2c_1 - 3c_2 - c_3 \\ c_1 \\ c_2 - 2c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3$$

- 上式は, a_1, a_2, a_3 が W を生成することを示している. そして a_1, a_2, a_3 は1次独立.
- ゆえに $\dim(W) = 3$ であって, $\{a_1, a_2, a_3\}$ は W の基底

- 連立方程式の解空間の1組の基底を, その連立方程式の基本解という
- 連立1次方程式 $Ax = 0$ (A は $m \times n$ 行列, $x \in \mathbb{R}^n$)
- 解空間を W とする. A を簡約化し, B とすると, B の主成分に対応しない未知数に値を任意に与えることで連立1次方程式の解が得られる
- 値を任意にとれる未知数の個数 $= W$ の次元

- B の主成分を含む列の個数が $\text{rank}(A)$ であるから, 次の重要な定理を得る

$$\dim(W) = n - \text{rank}(A)$$

- $n - \text{rank}(A)$ を連立1次方程式の解の自由度という

零空間

- 線形作用素 $A: V \rightarrow W$ の零空間、核空間

$$\text{Nul}(A) := \{x \in V \mid Ax = 0\}$$

- Ker は零空間が線形写像としての A の核 (Kernel) にあたる
- 線形写像の像 (image) は値域 (range) と呼ばれ、線形作用素 A の値域は $\text{Ran}(A)$
- 零空間は、ベクトル空間 V の部分空間